

*Zastosowanie modelu wielostanowego i funkcji copula do modelowania
odwróconych małżeńskich rent hipotecznych¹*

Joanna Dębicka, Stanisław Heilpern, Agnieszka Marciniuk

**Katedra Statystyki
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu**

¹ Badania częściowo finansowane z projektu badawczego NCN pt. “Niestandardowe wieloosobowe produkty ubezpieczeniowe uwzględniające zależności między ubezpieczonymi”. Umowa 2013/09/B/HS4/00490

PLAN PREZENTACJI

1. CEL PREZENTACJI
2. OPIS MODELU
 - struktura probabilistyczna
 - łączny rozkład czasu trwania życia małżonków
 - wzory macierzowe na świadczenie
3. WYNIKI NUMERYCZNE
 - funkcje copula
 - stopa procentowa
 - wyniki
4. LITERATURA

1. CEL PREZENTACJI – RENTA HIPOTECZNA

Renta hipoteczna jest to dożywotnia renta, którą właściciel nieruchomości może otrzymać w zamian za przeniesienie praw własności na spółkę (specjalnie w tym celu stworzony fundusz hipoteczny), gwarantując sobie w akcie notarialnym prawo do mieszkania w danym lokalu do śmierci.

Małżeńska renta hipoteczna – umowa w której właścicielami nieruchomości są małżonkowie – obecnie nie jest oferowana na rynku polskim.

1. CEL PREZENTACJI – RENTA HIPOTECZNA

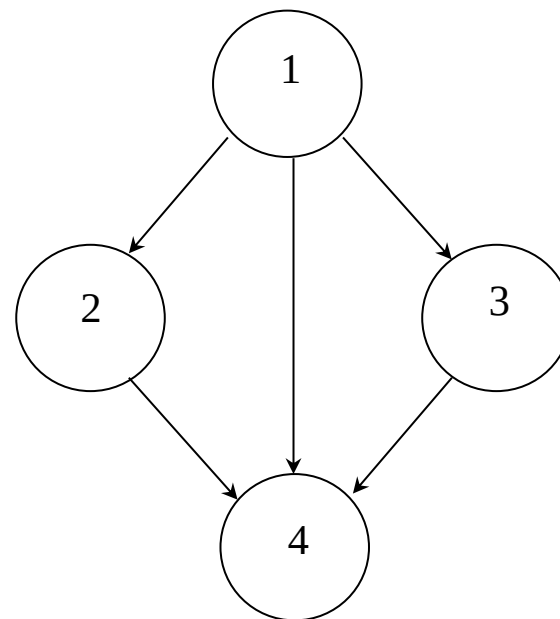
Celem prezentacji jest modelowanie struktury probabilistycznej i przepływów pieniężnych w małżeńskiej rencie hipotecznej. Rozważany jest przypadek, gdy renta wypłacana jest aż do momentu śmierci drugiego z małżonków, czyli tzw. **Status Ostatniego Przeżywającego (SOP)**.

W odróżnieniu do klasycznego założenia o niezależności czasu trwania życia małżonków przyjmuje się zależność przyszłego czasu trwania życia małżonków. Struktura zależności modelowana jest za pomocą funkcji copula.

Celem badań jest zastosowanie modelu wielostanowego oraz wyznaczenie wysokości świadczeń małżeńskiej renty hipotecznej. Obliczenia wykonane są za pomocą wzorów macierzowych na podstawie rzeczywistych danych z Dolnego Śląska. Porównane są wielkości świadczeń w przypadku niezależności, jak i zależności czasów trwania życia małżonków, przy zastosowaniu dwóch funkcji copula.

2. OPIS MODELU – STRUKTURA PROBABILISTYCZNA

Struktura zależności długości życia małżonków może być modelowana za pomocą procesów Markowa. Rozpatrzmy najprostszy model z $N = 4$ stanami, przedstawiony na wykresie 1.



Przestrzeń stanów:

- 1 - oboje małżonkowie żyją
- 2 - nie żyje mąż
- 3 - nie żyje żona
- 4 - oboje małżonkowie nie żyją

Rys. 1. Przestrzeń stanów

2. OPIS MODELU – STRUKTURA PROBABILISTYCZNA

- $S = \{1, 2, 3, 4\}$ – *przestrzeń stanów*,
- $T = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$ – *zbiór możliwych przejść między stanami*,
- (S, T) – *model wielostanowy* (opisujący wszystkie możliwe zdarzenia do momentu zakończenia umowy),
- $\{X(k), k \geq 0\}$ – *dyskretny proces stochastyczny*, opisujący zmiany stanów w czasie trwania umowy,
- $X(k) = i$, oznacza, że małżonkowie są w stanie i w chwili k , $i \in S$ $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2. OPIS MODELU – STRUKTURA PROBABILISTYCZNA

Założmy, że proces $\{X(k), k \geq 0\}$ jest niehomogenicznym łańcuchem Markowa (Wolthuis, Van Hoeck 1986). Wprowadźmy następującą macierz $\mathbf{D}$ (Dębicka 2013)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}(0) \\ \mathbf{P}(1) \\ \vdots \\ \mathbf{P}(n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times 4}$$

$$\mathbf{P}(0) = (1, 0, 0, 0)^T$$

$$\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$p_i(k) = P(X(k) = i) \quad i \in S$$

2. OPIS MODELU – ŁĄCZNY ROZKŁAD CZASU TRWANIA ŻYCIA MAŁŻONKÓW

T_x^M - przyszły czas trwania życia x -letniego męża, $T_x^M \in [0, \omega_x^M]$,

ω_x^M = wiek graniczny dla męża – wiek x męża w momencie zawarcia umowy,

T_y^W - przyszły czas trwania życia y -letniej żony, $T_y^W \in [0, \omega_y^W]$,

ω_y^W = wiek graniczny dla żony – wiek y żony w momencie zawarcia umowy,

Potrzebny jest wiek łączny rozkład przyszłego czasu trwania życia małżonków (T_x^M, T_y^W) .

x_0 - wiek referencyjny dla mężczyzn

y_0 - wiek referencyjny dla kobiet

$$x = x_0 + s, \quad y = y_0 + t \quad \text{oraz} \quad s, t \geq 0.$$

2. OPIS MODELU – ŁĄCZNY ROZKŁAD CZASU TRWANIA ŻYCIA MAŁŻONKÓW

Założmy, że znamy

- 1) dystrybuantę łącznego rozkładu $F(w, z)$ dla zmiennych $(T_{x_0}^M, T_{y_0}^W)$
- 2) funkcję copula $C(u, v)$ taką, że

$$F(w, z) = C(F^M(w), F^W(z)),$$

$$F^M(w) = P(T_{x_0}^M \leq w), F^W(z) = P(T_{y_0}^W \leq z) - \text{rozkład brzegowy } T_{x_0}^M \text{ oraz } T_{y_0}^W.$$

Łączna funkcja przeżycia $S(w, z)$ może być określona za pomocą funkcji copula $C^*(w, z)$

$$S(w, z) = P(T_{x_0}^M > w, T_{y_0}^W > z) = C^*(S^M(w), S^W(z)),$$

$$C^*(w, z) = w + z - 1 + C(1 - w, 1 - z).$$

$$S(w) = 1 - F(w). \quad (\text{Nelson 1999})$$

2. OPIS MODELU – ŁĄCZNY ROZKŁAD CZASU TRWANIA ŻYCIA MAŁŻONKÓW

Postać wektora $\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$ zależy od wieku małżonków oraz długości trwania umowy, co przedstawiono w tabeli.

(x, y)	$k = 1, 2, \dots, \min\{\omega_x^M, \omega_y^W\} - 1$ $(x + k < \omega_x^M \text{ oraz } y + k < \omega_y^W)$	$k = \min\{\omega_x^M, \omega_y^W\}, \dots, \max\{\omega_x^M, \omega_y^W\}$ $(x + k > \omega_x^M \text{ oraz/lub } y + k > \omega_y^W)$
$x = y$	$\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$	$\mathbf{P}(k) = (0, 0, 0, 1)^T$
$x > y$	$\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$	$\mathbf{P}(k) = (0, 0, p_3(k), p_4(k))^T$
$x < y$	$\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$	$\mathbf{P}(k) = (0, p_2(k), 0, p_4(k))^T$

Źródło: opracowanie własne.

2. OPIS MODELU – ŁĄCZNY ROZKŁAD CZASU TRWANIA ŻYCIA MAŁŻONKÓW

Twierdzenie (Heilpern, Dębicka, Marciniuk)

Założmy, że $C^*(w, z)$ opisuje związek między łączną a brzegową funkcją przeżycia dla x_0 -letniego mężczyzny oraz y_0 -letniej kobiety. Dodatkowo proces $\{X(t), t \in T\}$ jest niehomogenicznym łańcuchem Markowa, opisującym wszystkie możliwe zdarzenia w modelu wielostanowym $(S, T) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)\})$ małżeńskiej renty hipotecznej. Wtedy elementy wektora $\mathbf{P}(k) = (p_1(k), p_2(k), p_3(k), p_4(k))^T$ określone są następująco:

$$p_1(k) = P(X(k) = 1) = \frac{C^*(S^M(x+k), S^W(y+k))}{C^*(S^M(x), S^W(y))},$$

$$p_2(k) = P(X(k) = 2) = \frac{C^*(S^M(x), S^W(y+k)) - C^*(S^M(x+k), S^W(y+k))}{C^*(S^M(x), S^W(y))},$$

$$p_3(k) = P(X(k) = 3) = \frac{C^*(S^M(x+k), S^W(y)) - C^*(S^M(x+k), S^W(y+k))}{C^*(S^M(x), S^W(y))},$$

$$p_4(k) = P(X(k) = 4) = \frac{C^*(S^M(x), S^W(y)) - C^*(S^M(x), S^W(y+k)) - C^*(S^M(x+k), S^W(y)) + C^*(S^M(x+k), S^W(y+k))}{C^*(S^M(x), S^W(y))}.$$

2. OPIS MODELU – WZÓR MACIERZOWY NA WYSOKOŚĆ ŚWIADCZENIA

Świadczenie $\ddot{b}$ z tytułu dożywotniej małżeńskiej renty hipotecznej, płacone z góry, obliczane jest na podstawie rzeczywistej wartości nieruchomości W oraz procentu α tej wartości ($\alpha \in (0\%, 50\%]$) z następującego wzoru (Dębicka, Marciniuk 2014):

$$\ddot{b} = \frac{\alpha W}{\mathbf{V}^T \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{I}_{n+1} \cdot \mathbf{I}_{n+1}^T) \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{J}_1},$$

gdzie

$$\mathbf{J}_1 = (1, 0, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4 \quad \mathbf{I}_{k+1} = \left(0, 0, \dots, \underset{k+1}{\frac{1}{v}}, \dots, 0 \right)^T \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ dla każdego } k = 0, 1, \dots, n,$$

$$\mathbf{V} = (1, v, \dots, v^n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \quad v^k = \exp(-k \cdot R_{0,k}), \quad k = 1, 2, \dots, n - \text{czynnik dyskontujący}$$

$R_{0,k}$ - natychmiastowa stopa procentowa

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE – COPULA

- **dane Główny Urząd Statystyczny – dla Dolnego Śląska 2011 r.**

Prof. Heilpern 2015 znalazł rozkład łączny dla $T_{x_0}^M$ oraz $T_{y_0}^W$

$$F(w, z) = C(P(T_{x_0}^M \leq w), P(T_{y_0}^W \leq z))$$

dla wieku referencyjnego $x_0 = y_0 = 60$ i współczynnika korelacji Kendalla $\tau = 0.076$. Copula Gumbela ma następującą postać

$$C(u, v) = \exp\left(-\left((- \ln u)^\alpha + (- \ln v)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \quad \text{dla} \quad \alpha = 1.0786.$$

Kryterium wyboru – różnica odległości między łączną dystrybuantą empiryczną a teoretyczną funkcją Kendalla.

- **dane z wrocławskiego cmentarza – z 2011 r.**

Najlepiej dopasowaną copula dla tych danych jest copula AMH

$$C(u, v) = \frac{uv}{1 - \alpha(1-u)(1-v)} \quad \text{dla} \quad \alpha = 0.5867,$$

$$\tau = 0.156, \quad x_0 = y_0 = 0.$$

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE – COPULA

Brzegowe funkcje przeżycia $S^M(w)$ oraz $S^W(z)$ można wyznaczyć za pomocą liczby $l_{x_0}^M(l_{y_0}^W)$ mężczyzn (kobiet) żyjących w wieku $y_0(x_0)$, korzystając z Tablic Trwania Życia, w następujący sposób

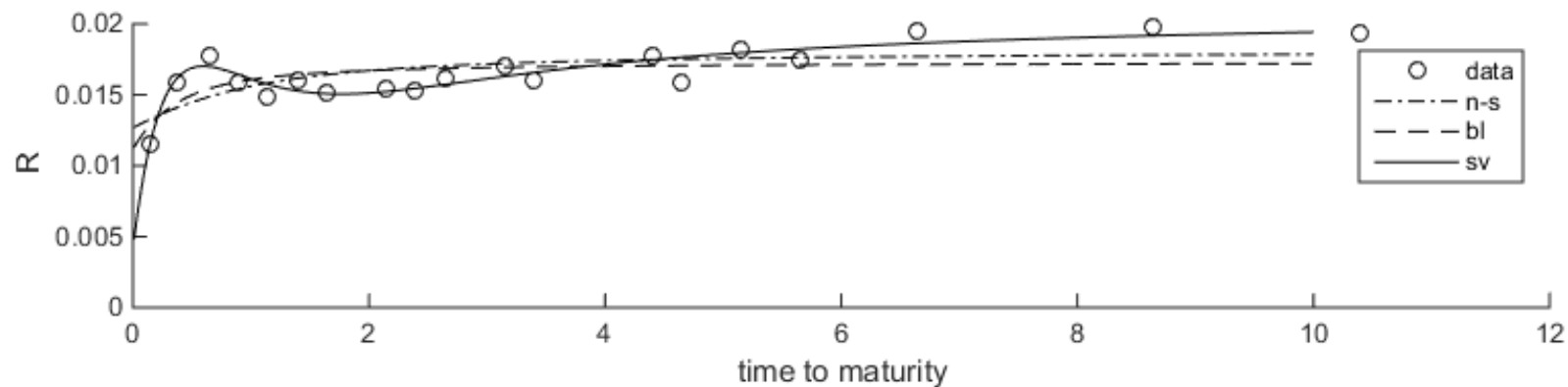
$$S^M(w) = P(T_{x_0}^M > w) = P(T_0^M > x_0 + w \mid T_0^M > x_0) = \frac{l_{x_0+w}^M}{l_{x_0}^M},$$

$$S^W(z) = P(T_{y_0}^W > z) = P(T_0^W > y_0 + z \mid T_0^W > y_0) = \frac{l_{y_0+z}^W}{l_{y_0}^W}.$$

Wartości $l_{x_0+w}^M$, $l_{x_0}^M$, $l_{y_0+z}^W$, $l_{y_0}^W$ wyznaczone są z TTŻ dla kobiet i mężczyzn z Dolnego Śląska z 2011 r. (niepublikowane dane).

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE – STOPA PROCENTOWA

Parametry funkcji $R_{0,k}$ estymowane były metodą najmniejszych kwadratów na podstawie rzeczywistych danych z rynku polskiego (http://bossa.pl/notowania/stopy/rentownosc_obligacji/), dotyczących obligacji zerokuponowych i obligacji o stałym oprocentowaniu z dnia 03.03.2015.



Rys. 2. Model natychmiastowej stopy procentowej

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE – STOPA PROCENTOWA

Najlepiej dopasowaną funkcją do danych empirycznych jest funkcja w model Svenssona. Wzór funkcji $R_{0,k}$ ma następującą postać

$$R_{0,k} = \beta_0 + \beta_1 \frac{\tau_1}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{\tau_1}} \right) + \beta_2 \left(\frac{\tau_1}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{\tau_1}} \right) - e^{-\frac{k}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \left(\frac{\tau_2}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{\tau_2}} \right) - e^{-\frac{k}{\tau_2}} \right),$$

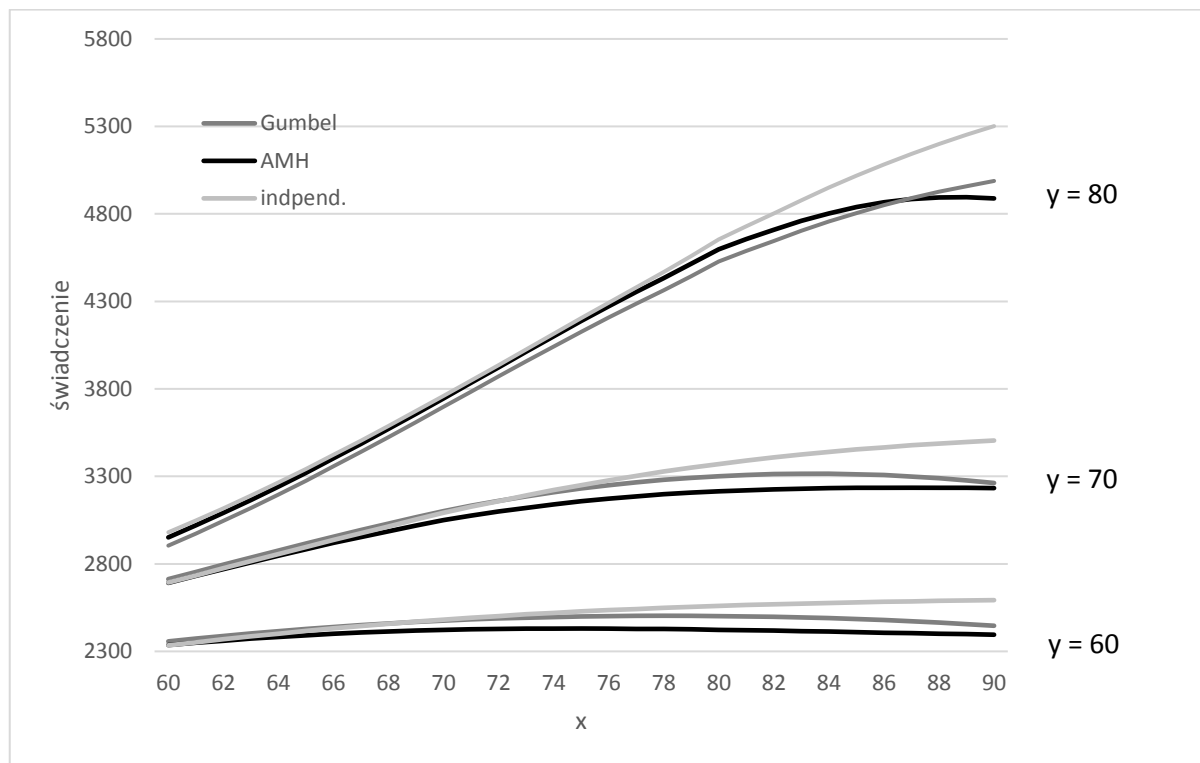
gdzie

$$\begin{aligned} \beta_0 &= 0.02096, & \beta_1 &= -0.01684, & \beta_2 &= 0.05844, \\ \beta_3 &= -0.05069, & \tau_1 &= 0.33388, & \tau_2 &= 0.57974. \end{aligned}$$

W celu uproszczenia obliczeń przyjmujemy, że $W = 100000$ PLN oraz $\alpha = 50\%$. Oczywiście dla dowolnego W_1 oraz α_1 , mamy

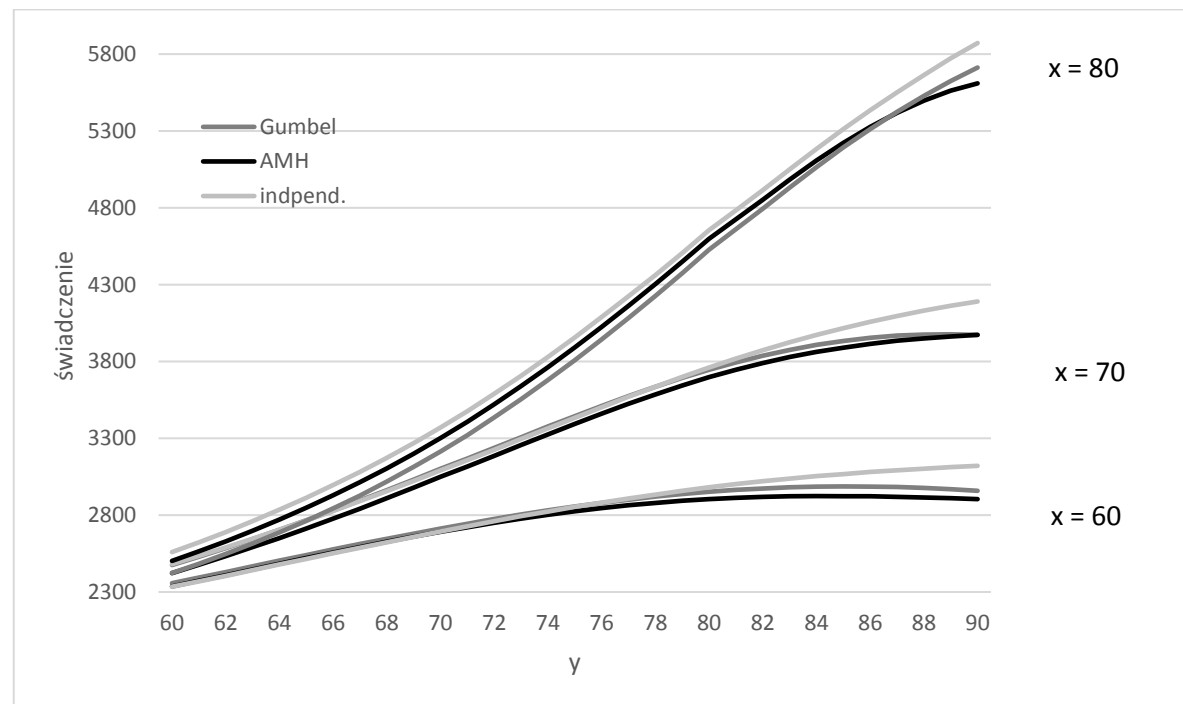
$$\ddot{b}_1 = \frac{W_1 \alpha_1}{W \alpha} \ddot{b}.$$

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE



Rys. 3: Świadczenia dla kobiet w zależności od wieku mężczyzn

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

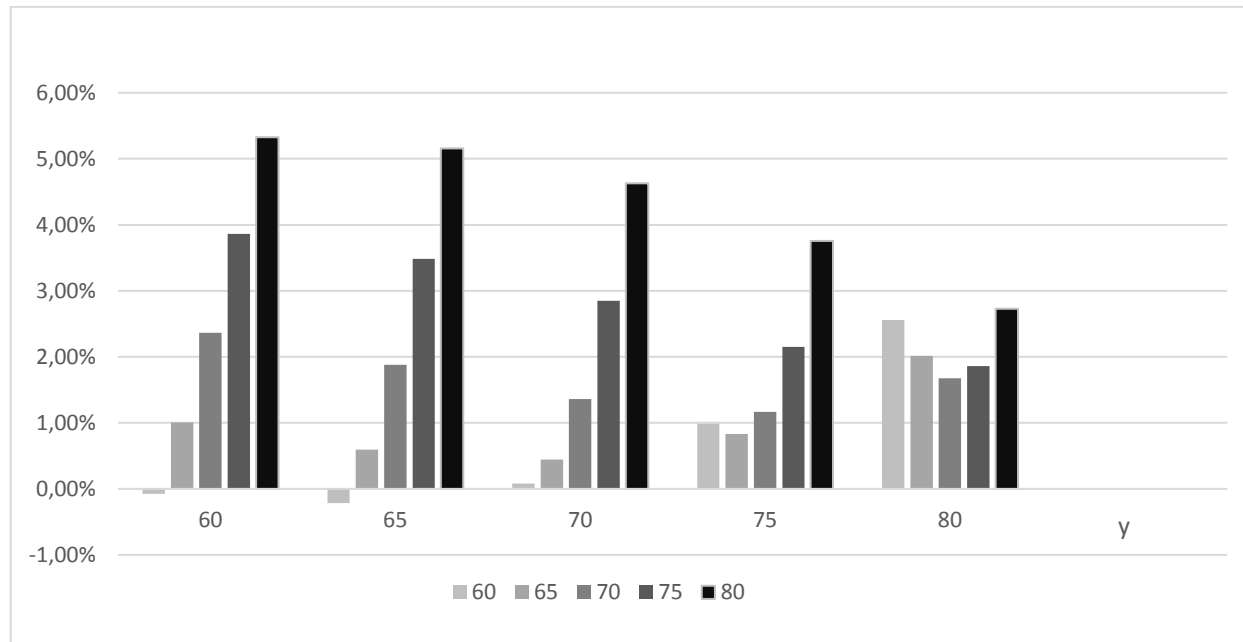


Rys. 4: Świadczenie dla mężczyzn w zależności od wieku kobiet

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

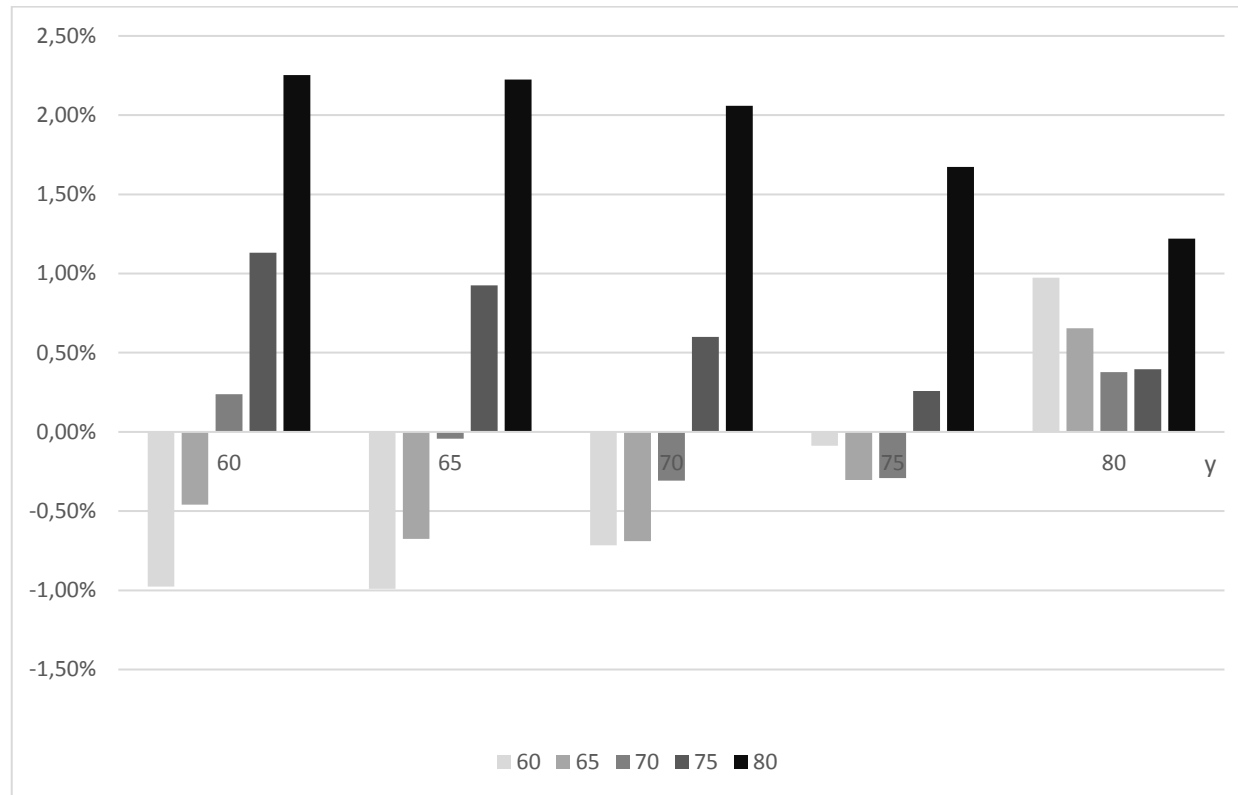
- Świadczenie rośnie wraz z wiekiem małżonków.
- Świadczenie rośnie szybciej dla starszych osób.
- Większy wpływ na wysokość świadczenia ma wiek kobiety.
- Dla niezależnych czasów trwania życia małżonków świadczenie jest prawie zawsze wyższe niż w przypadku copula AMH, wyższe dla starszych małżonków w przypadku Gumbela (Rys. 5 i 6)
- Świadczenie w przypadku funkcji AMH jest najniższe. Gdy jedna z osób jest w wieku powyżej 85 lat, a druga ma przynajmniej 80 lat świadczenie jest wyższe w przypadku funkcji Gumbela.

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE



Rys. 5: Przyrost względny między świadczeniem w przypadku niezależności i zależności (AMH) przyszłych czasów trwania życia małżonków

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE



Rys. 6: Przyrost względny między świadczeniem w przypadku niezależności i zależności (Gumbel) przyszłych czasów trwania życia małżonków

4. LITERATURA

- [1] DENUIT, M., DHAENE, J., Le BAILLY de TILLEGHEM, C., TEGHEM, S. 2001. Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths. In Belgian Actuarial Bulletin, 2001, vol. 1(1), pp. 18-39.
- [2] DĘBICKA J. 2013. An approach to the study of multistate insurance contracts. Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 2013, vol. 29, iss. 3, pp. 224–240.
- [3] DĘBICKA J., MARCINIUK A. An approach to the study of multilife reverse annuity contracts – manuscript.
- [4] DĘBICKA J., MARCINIUK A. 2014. Comparison of reverse annuity contract and reverse mortgage on the Polish market. 17-th AMSE. Applications of Mathematics in Economics. International Scientific Conference: Poland, 27-31 August, 2014. Conference Proceedings. Wroclaw University Press, 2014, pp. 55-64. ISBN 978-83-7695-421-9.
- [5] HEILPERN, S. 2015. Dependent structure induced by Markov chain in the multiple life insurance. 18-th AMSE. Applications of Mathematics in Economics. International Scientific Conference: Jindřichův Hradec 2-6 September, 2015. Conference Proceedings. <http://amse2015.cz/proceedings>.
- [6] NELSEN, R. B. 1999. An Introduction to Copulas. New York: Springer. 1999. ISBN 0-387-98623-5.
- [7] NORBERG, R. 1989. Actuarial analysis of dependent lives. In Bulletin de l'Association Suisse des Actuaries, 1989, vol. 40, pp. 243-254.
- [8] WOLTHUIS, H., VAN HOECK L. 1986. Stochastic models for life contingencies. In Insurance: Mathematics and Economics, 1986, vol. 5, pp. 217-254.

Dziękuję za uwagę